



Naissance de la science

Ci-dessus à gauche : sculpture du dieu Pan par Fanis Sakellariou (1916-2000), aux buttes Chaumont, Paris (don du comité scientifique grec de Genève à la ville); (à droite) dessin personnel nativité à la grotte de Morgat

Feuille de route

- I. Les savoirs faire fondamentaux dans la première antiquité.
 - a. Naissance de la géométrie et premier systèmes de numération.
 - b. Développement des administrations et savoirs faire fondamentaux. Exemples: 1, 2, 3, 4, 5
 - c. Cependant pas de science.
- II. Les premiers pas de la science en Méditerranée.
 - a. Les fondateurs sont-ils vraiment sages? Thalès, Pythagore
 - b. L'académie de Platon critique les sophistes, néanmoins Aristote découvre une logique encore inconsistante.
 - c. Lumière sur la Méditerranée et couché de Soleil

Index des cartes et des dates.

Index des noms

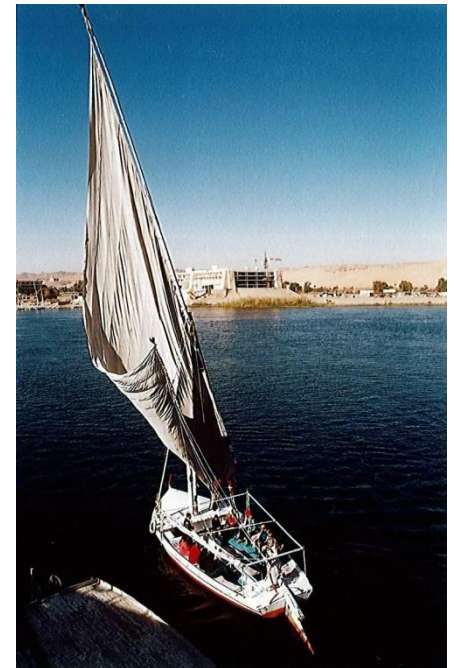
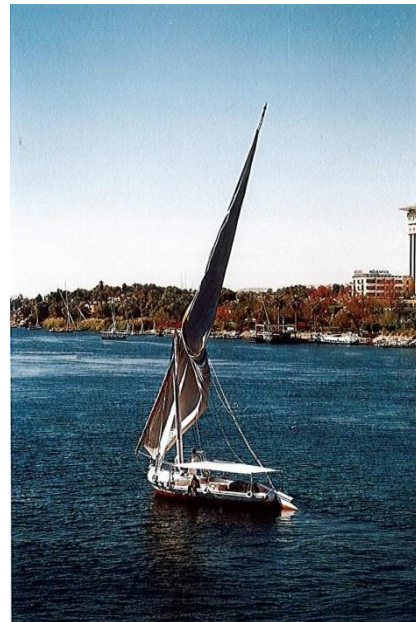
Index des notions

Index des idées

Bibliographie.

Naissance de la géométrie avec l'essor des grandes civilisations antiques (édifices) au bord de 3 fleuves...

- Pour l'historien grec *Hérodote* (vers 484-425 av. JC) la géométrie trouve ses origines 2 000 ans av notre ère dans les *crues répétées* du Nil.
 - Pour *reconstituer les limites des terrains* et construire des angles droits, les arpenteurs égyptiens utilisaient des cordes à 13 nœuds (de longueur 12) permettant de former un triangle rectangle avec les mesures 3, 4, 5. (Suivant le théorème de Pythagore on vérifie que $3^2+4^2=5^2$)
- La traditionnelle « felouque » ci-contre (ci-dessus temple de Philae) et insecte repêché sur le Nil en train de se noyer dans la piscine du bateau (voyage 2014).*



...sur la base de systèmes de numération différents.

- A Sumer : système de position en base 60 (division de l'année en 365 jours, de l'heure en 60 minutes, des angles d'un cercle en 360 degrés)
- Inde : origines des chiffres dits « arabes » (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, et 0).
- Egypte : système additif (I, II, III, IIII, IIIII, IIIIII, IIIIIII, IIIIIIII, n...) que l'on voit sur la table de multiplication au temple Amon-Ré (Luxor), système décimal (sans le zéro)

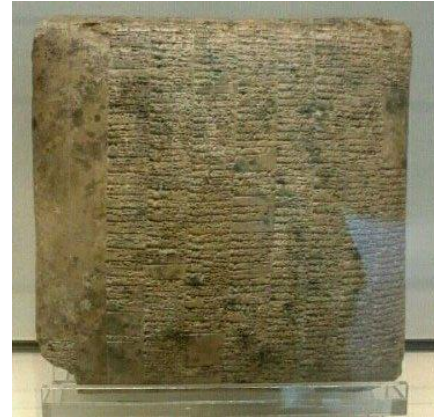
Ci-contre : tables de multiplication (-2000 ans) au temple de Luxor, temple d'Amon (haut).



Le développement des administrations par l'enseignement des mathématiques...

Unification des moyens de gestion : calendrier; comptabilité; métrologie:

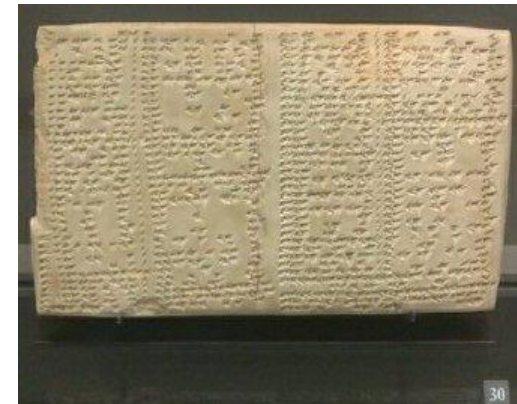
- Les Sumériens avaient aussi une *année calendaire de 360 jours*. 360 étant le plus petit nombre de 24 facteurs ce qui le rend commode à diviser en mois, en minutes, en secondes...
- C'est à eux que l'on doit la division d'une journée en 24 h (*60 secondes font une minute*, 60 minutes font une heure), et aussi la division du cercle en 360° (c'est encore d'eux que nous vient la mesure en $^\circ$ des angles)



(haut gauche) bilan d'une exploitation agricole de l'Etat pour une année, très antérieur à la conquête du royaume sumérien. Tablette sumérienne (3^e dynastie d'Ur) (Louvre).

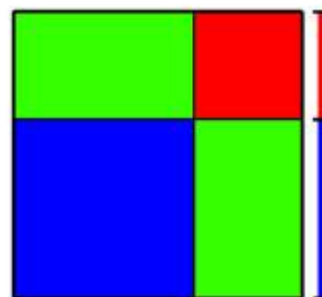
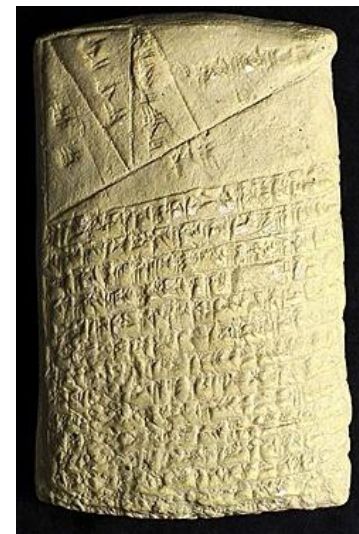
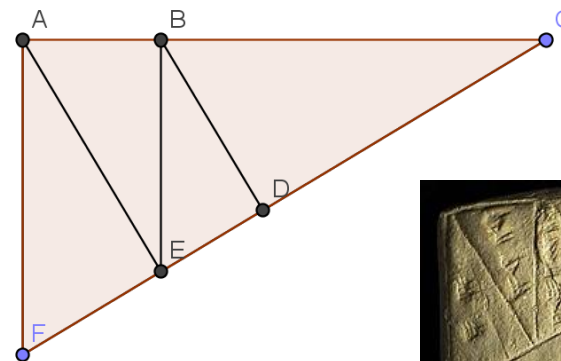
(haut droite) devis de travail pour du labour et hersage, avec salaire de l'ouvrier et sceau du scribe. Tablette sumérienne. (Louvre)

Table de division et conversion des fractions (Louvre) (bas)



...témoigne d'un savoir-faire fondamentaux notamment en géométrie

- 2 000 ans av. JC. Babyloniens et Egyptiens *résolvent de manière narrative des problèmes* concrets en utilisant implicitement des propriétés des *figures géométriques assemblées* entre elles, sans aucune multiplication ni division.
- Sur la *tablette sumérienne IM55357 de 1800 av. JC.* initialement conservées au musée de *Tell Hamal, Iraq*, on pouvait lire, jusqu'en 2003 (Disparue pendant le pillage du musée), les propriétés des *triangles semblables*.

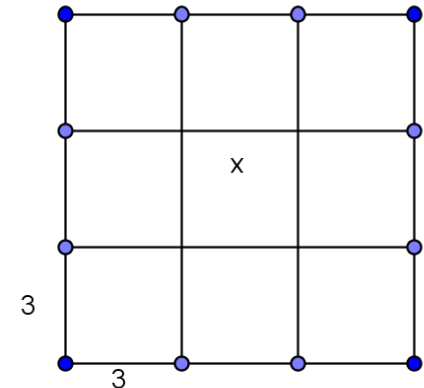
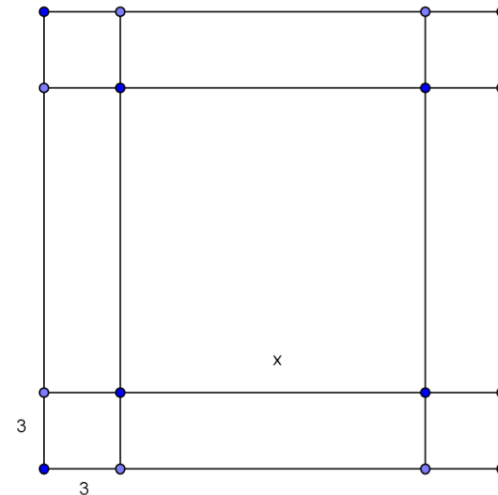


Ci-contre on voit une preuve
géométrique d'une identité
remarquable : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Exemple n°1

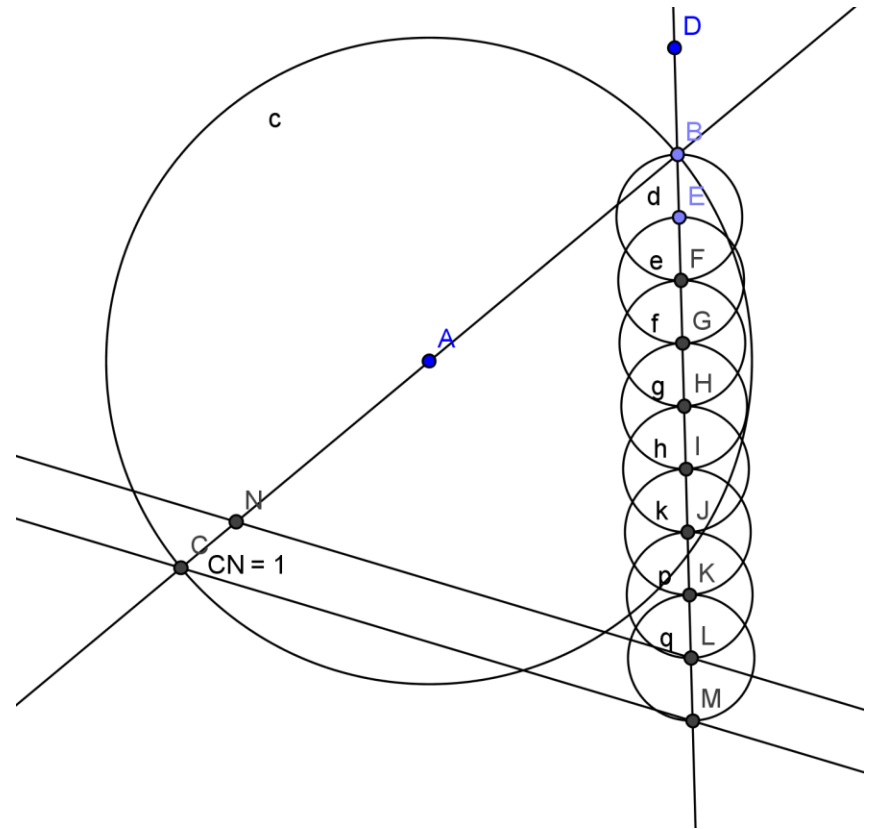
Comment résoudre les équations du 2d degré géométriquement?

- Exemple pour résoudre $x^2 + 12x = 45$, en faisant appel à un calcul d'aires.
- A partir de la figure ci-contre où le carré intérieur a pour côté x et les rectangles extérieurs ont pour côtés x et 3 , et où chaque terme de l'équation précédente correspond à une surface (solution sur tableau suivant).
- (indication) On arrive à la figure ci-dessous. (solution algorithmique dans l'index des notions)



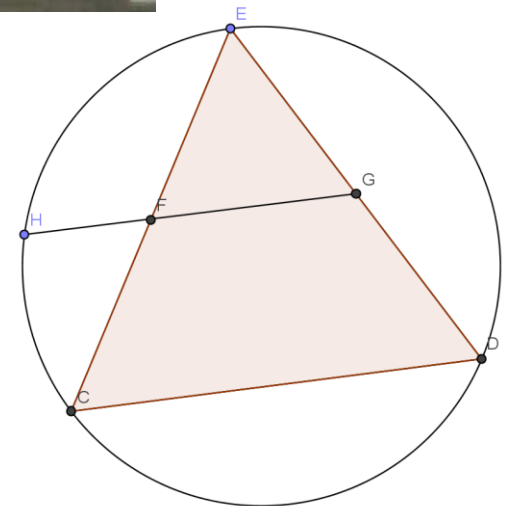
Exemples n°2, et 3

- Problèmes de **progression** (de suite de nombres) pour la répartition du blé en Egypte dans le **papyrus de Rhind**. Littéralement : « *100 pains en 5 personnes; $1/7$ des 3 premières c'est la part des deux dernières. Quelle est la différence?* » (Enoncé et solution dans l'index des notions)
- Le scribe Ahmes dans le **papyrus de Rhind** propose aussi de construire le nombre Pi à partir de l'égalité traduisant la phrase : « *L'aire du cercle de diamètre 9 coudées est celle du carré de côté 8 coudées* » (Solution algorithmique donnée en index des notions).



Exemple 4, et 5

- Ci-contre tablette témoignant d'une théorie du polygone régulier (Louvre) II^e millénaire av J.C.
- Les *Egyptiens* anciens ont découvert une *construction géométrique* de la section dorée qu'ils appliquèrent même au pyramides. C'est une construction du nombre Phi.



...Cependant, pas vraiment encore de science au sens moderne.

- Les *premiers dictionnaires* qui sont apparus ne furent pas des dictionnaires unilingues, mais certainement *bilingues*, et encore proche de simples lexiques. Ils étaient rédigés par les professeurs d'écoles et destinés aux *conquérants sémitiques du troisième millénaire* av. JC. car ils appréciaient et imitaient les œuvres littéraires sumériennes. C'est l'absence de définitions qui empêche la fondation de vraies sciences.

Ci-contre stèle de la victoire de Sargon d'Akkad, et dessous tablette sumérienne de vocabulaire bilingue sumérien / akkadien



Les premiers énoncés scientifiques de la géométrie sont en langue grecque

Le premier alphabet pour écrire une langue indo-européenne. Il est utilisé dans de nombreuses notations (trigonométries, algèbre..)

- Ici ne figurent pas koppa (entre pi et rô), ni stigma/digamma (entre epsilon et dzêta) ce qui revient alors à un alphabet à 26 lettres.*
- Les mêmes signes avec un ' signifient des chiffres d'abord (de 1 à 10 alpha à iota) puis de 10 à 100 (iota à rô) puis jusqu'à 800 (oméga) avec des signes complémentaires pour aller jusqu'à 9000.*

Alphabet grec

A α	a alpha	N ν	n nu
B β, β	b bêta	Ξ ξ	ks kai
Γ γ	g gamma	Ο ο	o omicron
Δ δ	d delta	Π π	p pi
Ε ε	e epsilon	Ρ ρ	r rô
Ζ ζ	dz dzéta	Σ σ,ς	s sigma
Η η	e èta	Τ τ	t tau
Θ θ	t aspiré : thêta	Υ υ	u upsilon
Ι ι	i iota	Φ φ	p aspiré : phi
Κ κ	k kappa	Χ χ	k aspiré : khi
Λ λ	l lambda	Ψ ψ	ps psi
Μ μ	m mu	Ω ω	o oméga

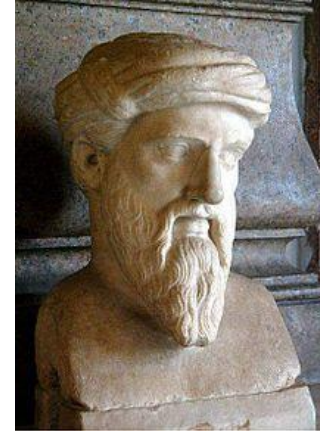
Deux fondateurs qui figurent parmi les 7 sages de la Grèce antique (VI^os. av. J.C.) : Thalès (Millet), et ...

- Millet est située dans la Ionie avec la cité antique Didymes célèbre pour le sanctuaire et l'oracle d'Apollon dont le temple est pillé par Darius en -494). La Ionie est la première région grecque où se sont développés l'art, la science, la philosophie (l'île de Samos, dont Pythagore est originaire, en fait encore partie). Selon Hérodote les ioniens sont arrivés au cours du 1^{er} millénaire av. J.C et ils assimilèrent un culte et un sanctuaire déjà existant dédié à la déesse Nature.
- Le site de la ville antique de Millet sur trouve actuellement sur le territoire du village turque de Balat qui a été capitale ottomane au XIV^{ème} siècle.

Aujourd'hui Millet n'a plus accès à la mer comme dans l'antiquité

...Pythagore (Samos), qui aurait châtié un élève découvrant l'irrationalité.

- *Voici un petit problème pythagoricien : Polycrate, tyran de Samos, demande un jour à Pythagore le nombre de ses élèves en ces termes : « Fortuné Pythagore, rejeton héliconien des Muses, dis-moi combien dans ton école tu as d'athlètes que tu dresse aux glorieux exercices de la philosophie? – Je vais te le dire, Polycrate : la moitié étudie les belles sciences mathématiques; l'éternelle nature est l'objet des travaux d'un quart; un septième s'exerce au silence et à la méditation; il y a de plus 3 femmes dont Théano est la plus distinguée. Voilà le nombre de mes disciples qui sont aussi ceux des Muses. »*



Ci-contre buste de Pythagore, musée du Capitole à Rome, et vue de Métaphonte.

L' Académie de Platon critique les sophistes (Parménide, Zénon), cependant Aristote découvre une logique encore toute inconsistante.

- L'Académie tire son nom de la terre où elle est située, au nord-est d'Athènes, près du tombeau du héros grec Académus qui évita à Athènes d'être détruite par les frères jumeaux Castor et Pollux, venu libérer leur sœur Hélène, enlevée par Thésée, roi athénien, alors qu'il était veuf de 50 ans et qu'elle n'avait que 12 ans. Académus disant au Dioscures où se trouvait Hélène évite à la ville d'être détruite. (Avant la guerre de Troie donc car Hélène n'est alors qu'une enfant dans la légende)
- La logique moderne, dans l'ouvrage de Kleene notamment, (*Logique mathématique*) a toujours pour rôle de démasquer des sophismes.

(ci-contre) jardins d'Academos.



Lumières en Méditerranée...

- A la bibliothèque d'Alexandrie dirigée par Eratosthène, on trouve les *Eléments* d'Euclide jusqu'à son déclin progressif peu après Cléopâtre.
- La renommée d'Archimède de Syracuse pendant la 2^e guerre punique.
- Apollonius un auteur célèbre venu de Perge (Turquie actuelle).

Ci-contre phare d'Alexandrie, statue de Cléopâtre par Masini Girolamo 1882, et reconstitution modeste d'une étagère de la bibliothèque d'Alexandrie (bas).

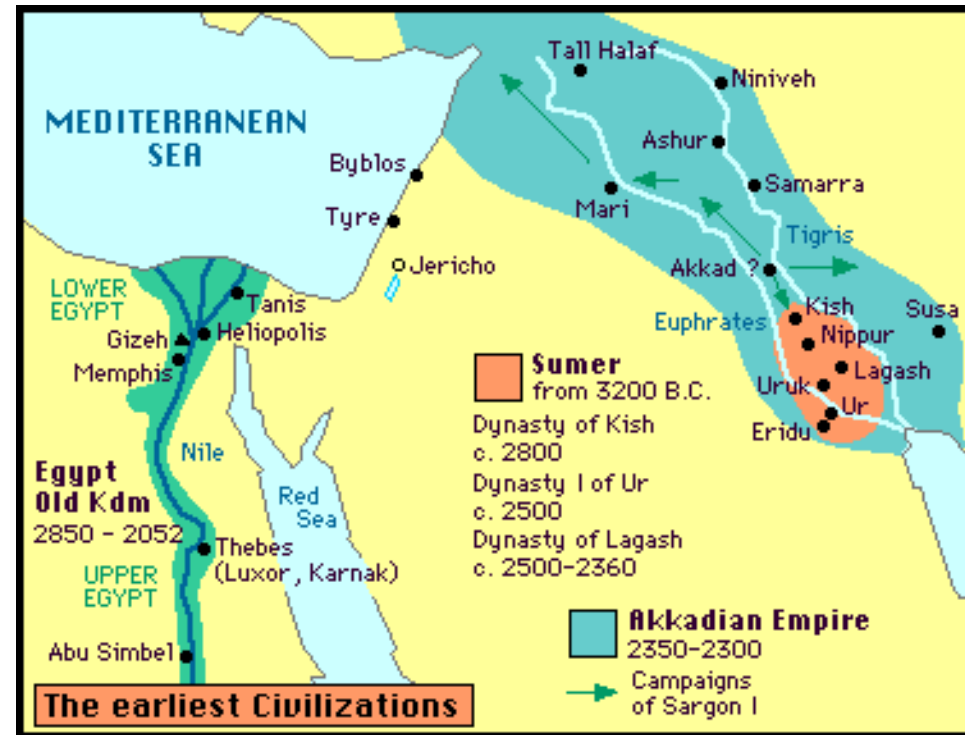


...et couché de Soleil.

- Claude Ptolémée (90-168 ap. JC.), Héron d'Alexandrie (1^{er} siècle av. JC.), Diophante (200-284 ap. J.C.) vont encore exercer une forte influence sur les milles années qui suivront, bien qu'on ne sache presque rien des 2 derniers.

Index des dates et cartes

- 19^{ème} siècle et 18^{ème} avant JC. : La majorité des tablettes mathématiques cunéiformes parvenues jusqu'à nous date de cette période, dite l'époque **paléo-babylonienne**. Ce corpus inclut une quantité importante de textes scolaires destinés à la formation des scribes. (Repères: 23-22^{ème} s. av. J-C. s'est formé l'empire de Sargon d'Akkad en conquérant des Sumériens. Puis, le royaume de Babylone avec la première dynastie le règne d'Hammu-rabi 1792-1750 sera fondé sur les ruines de l'empire de Sargon).



Index des dates et cartes

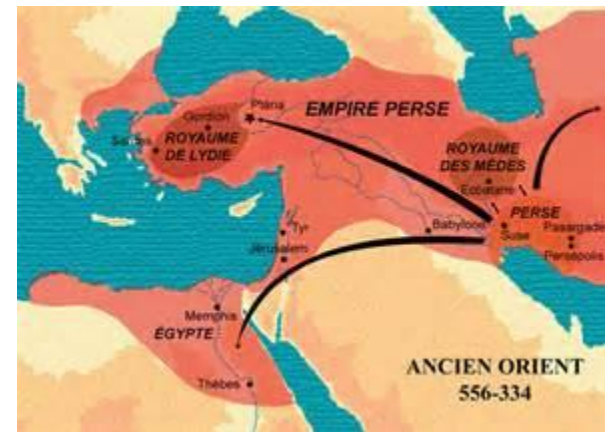
- -3300 av J.-C, la civilisation de la vallée de l'Indus:
 - Système de poids et mesures utilisant le système décimal.
 - **Technologie de la brique**
 - **Sensibilité aux formes géométriques.**
 - **Invention du concept zéro.**
 - Invention du jeu des échecs (?)
- Plus tard aussi :
 - **Utilisation précoce des théorèmes de Pythagore;** quadrature d'un rectangle (Védique)
 - **Introduction du zéro.** Utilisations précoces du triangle de Pascal, des suites de Fibonacci; (Jainiste)
- -3000 av. J.-C. la civilisation Sumer invente :
 - l'arpentage
 - **La technologie de la brique.**
 - L'écriture cunéiforme sur tablettes.
 - **La géométrie.**
 - Numérotation sexagésimale.
- Plus tard aussi
 - Utilisation précoce des **théorèmes de Pythagore**
 - **Introduction du zéro à Babylone,** lié à une innovation comptable.

Index des dates et cartes

- **Thalès (-625 -547 av. J.C.)** vécu à Millet avant les premières invasions perses. Millet fut reconstruite, au début de l'apogée de la civilisation grecque, à la suite d'une série de victoires contre les perses en -479 av. JC, car les Perses avaient détruit la ville en -494.



Carte ci-contre : Extension de l'empire Perse dans la période 556-334 avant que la Grèce n'atteigne l'apogée de sa civilisation. Les colonies grecques en Lydie antique, (la « Ionie ») sont le berceau de la civilisation occidentale, et il est situé aujourd'hui principalement en Turquie avec le sanctuaire d'Apollon à Didymes notamment.



Index des noms

- **Abu Kamil** (vers 850-930 av. JC) mathématicien égyptien propose le problème suivant « *Un ouvrier gagne 6 dirhams par jour travaillé et doit rendre 4 dirhams pour chaque jour où il ne travaille pas. A la fin du mois, son salaire et sa dette s'équilibrent. Combien de jours a-t-il travaillé?* » (Ce qui reviendrait aujourd'hui à résoudre $6x=4(30-x)$, où x est le nombre de jours travaillés.)
- **Ahmes** (scribe). Auteur du papyrus de Rhind datant de -2000 av. JC (-1650?) qui contient des problèmes de suite et une première méthode de construction du nombre π . découvert par Rhind au 19^e siècle dans la région de Thebes (ville de actuelle de Louxor)

Index des noms

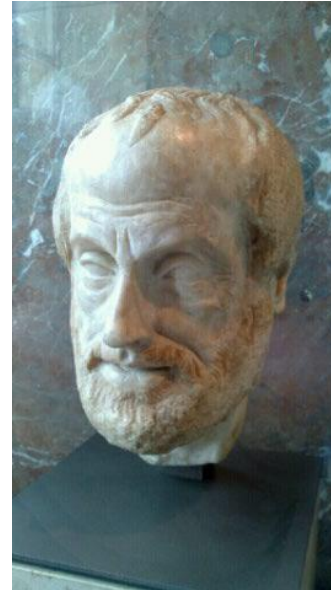
- **Apollonius de Perge** : (-262-190) est originaire de Pergé, l'actuelle Aksu en Turquie à 17km à l'est d'Antalya. Il meurt à Alexandrie. Dans son ouvrage sur les *Coniques* raisonne sur plusieurs figures en même temps et montre ainsi l'efficacité des coniques pour résoudre des problèmes qui demandent de montrer que des aires sont égales, des longueurs proportionnelles. Descartes, Newton n'auront de cesse de résoudre les problèmes posés par Apollonius.
- **Archimède de Syracuse** (-287,- 212) donne (ou cache aussi parfois) les preuves des propriétés qu'il découvre et qui sont inhérentes aux figures géométriques étudiées. C'est Archimède qui introduit la notion de **centre de gravité** d'un triangle (Comment une idée peut-elle avoir un centre de gravité?). Et, c'est encore lui qui permet de comprendre la notion de **barycentre** qui est réinvestie par les mathématiques modernes. On rappelle une propriété d'Archimède : soit b un nombre naturel non nul. Pour tout nombre a (entier naturel), il existe un nombre k (entier naturel) tel que $kb > a$. De plus, en utilisant une double suite, celle des périmètres des polygones inscrits et exinscrits dans un cercle de rayon 1, après 96 itérations, Archimède parvient à encadrer une valeur de π entre $220/71$ et $22/7$. Il est aussi l'inventeur de la formule qui permet de calculer le volume d'une sphère $V = \frac{4\pi R^3}{3}$ (qu'il aurait faite inscrire sur sa tombe).



Vue d'Alexandrie (haut) et de Syracuse (bas)

Index des noms

- **Aristote**: il a créé la discipline Logique avec son ouvrage sur la *Rhétorique* (-329,-323), cependant il a ensuite dédaigné le sujet, comme cela a été remarqué par des auteurs tels que Bernard Ruyer dans *Logique* (1990). Le mot « logiquement » prend même un sens péjoratif dans les écrits d'Aristote, un sens opposé à raisonnable et intelligible: « argumenter logiquement » signifie parfois argumenter à la manière des platoniciens, c'est-à-dire en faisant des raisonnements vides.
- **Cléopâtre** : Le premier incendie qui aurait atteint la bibliothèque d'Alexandrie fut causé par accident par César venu soutenir Cléopâtre dans son accession au trône, dans un climat de guerre civile, son bateau est encerclé dans le port, il décide de mettre feu aux navires qui l'encerclent, et le feu se propage aux quartiers proches du port, jusqu'à la bibliothèque, selon Plutarque. Antoine, après la mort de César, donnera des milliers de livres à Cléopâtre plus tard pour compenser la perte causée par César. Cléopâtre, une descendante des Ptolémée d'ascendance grecque et extrêmement cultivée, était très affectée par cette perte. Après la mort de Cléopâtre et de Marc Antoine, Alexandrie devient une province romaine sous la domination d'Auguste (neveu de César) premier empereur romain qui ne subventionne pas la bibliothèque comme elle l'avait été du temps des Ptolémée (les romains ont été aussi traumatisés par la résistance d'Archimède à Syracuse).



(gauche) portrait d'Aristote, au Louvre, d'après un original en bronze de Lysippe (portraitiste attribué d'Alexandre le Grand);
(droite) Alexandre, Louvre

Index des noms

- **Diophante d'Alexandrie** (200-284 ap. J.C.) : On ne sait presque rien sur la vie de Diophante sinon qu'il vécut à Alexandrie, comme Héron. Lorsqu'un problème comporte deux inconnues, mais qu'on ne peut poser qu'une seule équation, on obtient ce qu'on appelle aujourd'hui une « équation cartésienne » de droite, et il peut y avoir une infinité de solutions, mais il n'est pas encore sûr qu'on trouvera parmi elles un couple de solutions (x, y) tel que x et y soient des entiers naturels. Diophante, qui a écrit *les Arithmétiques*, a mis au point des techniques pour résoudre ce type d'équations, appelées « équations de Diophante » ou « équations indéterminées ».

Index des noms

- **Euclide.** vers 300 av. JC, Euclide écrit les *Eléments de géométrie*. chez Euclide il n'y a pas de notion de problème, ni d'utilisation technique des figures géométriques, mais des définitions un peu figées, alors que chez Archimède et Apollonius on sent une puissance dynamique en marche. Toutefois chez Euclide : des modèles de démonstration pour la postérité jusqu'à nos jours qui justifient entre autre des théorèmes de Pythagore ou de Thalès (La proposition II du livre 6 des *Eléments* d'Euclide énonce une généralisation du théorème de Thalès), étudie les solides de Platon, et prouve que la racine carrée de 2 est un nombre irrationnel, par une démonstration par l'absurde. Sur Euclide on ne sait presque rien, sauf 2 faits discutables selon Heath, le spécialiste anglais : Euclide vécut après Platon, et avant Archimède et il travailla à Alexandrie (et il tiendrait sa formation peut-être de l'école platonicienne). Il définit l'égalité de deux figures : « *Les grandeurs qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elles* ». Il définit aussi la « Divine proportion » : « *Une droite est coupée en extrême et moyenne raison quand elle est tout entière relativement au plus grand segment ce que le plus grand est au plus petit* »/ *En arithmétique on enseigne à nos collégiens la division euclidienne, et l'algorithme d'Euclide pour déterminer le PGCD de 2 nombres.* Au XIX^es. Lobatchevski proposa plusieurs modèles de géométrie vérifiant les premiers axiomes d'Euclide, et où le 5^{ème} postulat est faux. C'est le début de la géométrie non euclidienne. 5^{ème} postulat d'Euclide: « *Par un point du plan, il passe une et une seule parallèle à une droite donnée* ».

-

24/07/2014

Index des noms

- **Héron d'Alexandrie** (1^{er} siècle av. JC.): Il est à l'origine d'une formule permettant de calculer la surface d'un triangle, sans connaître la hauteur ($S = [p(p-a)(p-b)(p-c)]^{(1/2)}$, avec a, b, c les côtés du triangle et p le périmètre.)
- **Homère** (-800, -700 av. JC.). La célèbre cette réponse faite à Hésiode demandant combien de Grecs composaient l'armée d'expédition du siège de Troie: « Il y avait sept feux aux vives flammes, à chaque feu cinquante broches , et à ces broches cinquante rôtis. Autour de ces viandes se trouvaient trois fois cents Grecs ». (Réponse: 315 000 Grecs)



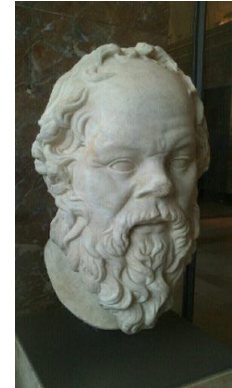
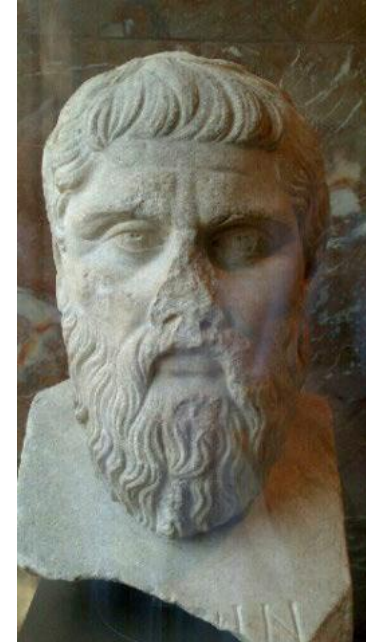
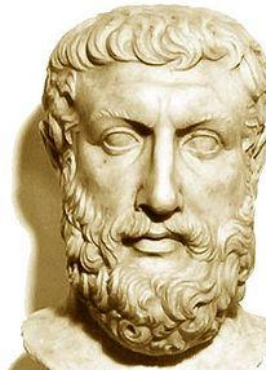
Index des noms

- **Luxor** : Le temple d'Amon à Luxor présente une table de multiplication vieille de 5000 ans et d'autres tables attribuant des numéros à des hiéroglyphes.
- **Mahavira** est un mathématicien hindou du IX^e av J.C. Une figure du jaïnisme (599-527 av. J.C.). (Représentation ci-contre)
- **Oppert** (Jules) (1825-1905), archéologue qui a redécouvert la civilisation sumérienne (Photo ci-contre).



Index des noms

- **Platon** (427-348 av. JC.) : Citation : « *Nul n'entre ici s'il n'est géomètre* » frontispice de l'Académie. Il a défini 5 solides comme des polyèdres réguliers dans son dialogue du *Timée* : tétraèdre, cube, octaèdre, dodécaèdre, icosaèdre. Les solides de Platon sont étudiés dans les *Eléments* d'Euclide, et Descartes puis Euler mettront en évidence plusieurs de leurs propriétés remarquables. Archimède, quant à lui, définira 13 solides comme des polyèdres convexes semi-réguliers (qui peuvent tous être construits à partir des solides de Platon en opérant des symétries variées). Par ailleurs, dans le dialogue *Ménon*, Platon met en scène le problème de Pythagore concernant l'irrationalité de $\sqrt{2}$. On peut ajouter qu'une relation à laquelle Platon s'est beaucoup intéressée $3^3+4^3+5^3=6^3$. Si l'on cherche d'autres rapports du même genre on pose une équation indéterminée du 3^{ème} degré: $x^3+y^3+z^3+t^3=0$. On pourrait montrer « sans très grande difficulté » qu'il y a une infinité de quadruplets de nombres entiers positifs ou négatifs qui satisfont cette relation.

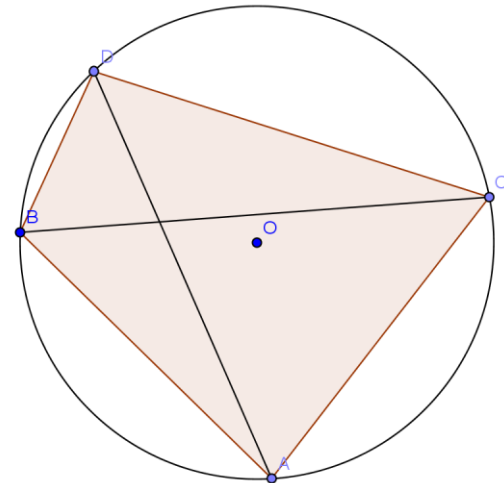


Ci-contre de gauche à droite: Parménide (le maître de Zénon d'Elée), le « Platon du Louvre », et (à droite) le Socrate du Louvre (Centrale Montemartini)

Index des noms

- **Ptolémée** (90-168 ap. JC.) Claude : un romain originaire de Thèbes (Luxor), né en 90 et il meurt à Canope en 168, et vécu à Alexandrie. Il a écrit l'Almageste, où il établit le théorème suivant: « *Dans un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle, le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés* ». Le mathématicien irlandais J. Casey (1820-1891) publiera une généralisation de ce théorème. Le système astronomique géocentriste de Ptolémée a eu une influence considérable sur tout le Moyen Âge.

Ci-contre gravure du XVIème



Index des noms

- **Pythagore** (Samos) : né à Samos vers -569, il meurt en Italie à Métaponte vers -494. C'est un athlète dans sa jeunesse : il emporte tous les combats de boxe aux jeux Olympiques à 17 ans (57^{ème} olympiade). Plus tard c'est à Crotone qu'il fonde son école de sagesse, puis il fonde d'autres communautés similaires en Italie et en Grèce, défendant des lois aristocratiques, mais les émeutes populaires menacent, et il se réfugie à Métaponte où il meurt finalement. L'école de Pythagore découvrit l'irrationalité de $\sqrt{2}$, et c'est Euclide qui la démontra. Par ailleurs on appelle nombres de Pythagore les triplets a , b , et c qui vérifient la relation $a^2+b^2=c^2$. Exemple : $3^2+4^2=5^2$. Il existe une infinité de nombres entiers positifs qui remplissent cette condition.
- **Russell** : Citation : « *At the age of eleven, I began Euclid, with my brother as my tutor. This was one of the great events of my life, as dazzling at first love. I had not imagined that there was anything so delicious in the world* » Bertand Russell.



Index des noms

- **Syracuse** est le siège des romains lors de la 2^{ème} guerre punique, Archimède a fait ses études à Alexandrie, et il est né à Syracuse et entre comme ingénieur au service du roi pour protéger la ville contre les romains. Il meurt en -212, lorsque la ville est prise par Marcellus.
- **Thalès** (Millet): né dans cette ville vers -625 et mort au même endroit vers -547, il fut l'un des « 7 sept sages » de la Grèce antique (la liste la plus ancienne des 7 sages est donnée par Platon dans le dialogue *Protagoras*). Selon la légende il aurait calculé la hauteur de la pyramide de Khéops en mesurant la longueur de son ombre et la longueur d'un bâton. « *Ne te porte jamais caution* » (Ἐγγύα, πάρα δ' ἄτα) serait la devise de Thalès, car les 7 sages ont chacun une devise.



Ci-contre vue de Syracuse

Index des noms

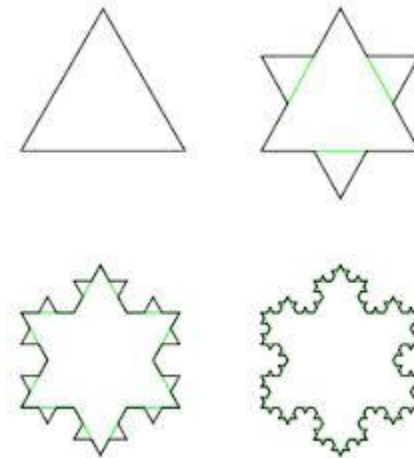
- « **Thèbes** » est le nom que les grecs ont donné à la ville actuelle de Luxor (à ne pas confondre Thèbes égyptienne et Thèbes en Grèce, la ville qui aurait eu un roi nommé Œdipe qui libéra la ville du sphinx menaçant)
- **Willard Libby** (Prix Nobel en 1960) inventeur du procédé utilisant le carbone 14 permettant de dater les objets en archéologie .



Index des noms

- **Zénon d'Elée** (-490 -430) : sophiste disciple de Parménide. Un défi aux paradoxes de Zénon, comme celui d'Achille et la tortue, pourrait être le flocon de **Von Koch** (1904) qui a une structure fractale dont le périmètre est infini et l'aire est finie.

Ci-contre : Construction du flocon de Von Koch, où on part d'un triangle équilatéral.



Index des notions

- **Algèbre** serait née avec les besoins de la vie courante : arpentage des terres, échanges commerciaux, calculs de salaire, partage d'héritage.
- **Algorithme de Babylone.** Il s'agit d'abord d'une tablette de -1700 av JC. La *tablette YBC 7289 (conservée aux Etats Unis)*. Sur la tablette on distingue un *carré et une diagonale*. A côté on trouve des *inscriptions cunéiformes*. On peut lire et identifier les nombres *1 24 51 10 (?)*. En *base soixante* les nombres *1 24 51 10* veulent dire $1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3$. Ce qui vaut 1,41421296 qui est une approximation de la *racine carrée de 2* (la longueur de la diagonale du *carré de côté 1 justement*). Le procédé ? Des itérations successives, à partir d'une première valeur grossièrement approchée comme 1. Prenez la moyenne entre chaque terme et el quotient de 2 par ce terme et vous obtiendrez : 1; 3/2; 17/12;... (car $3/2 = (1+2/1)/2$, et $17/12 = (3/2 + 3/(3/2))/2$). Cela revient à étudier la *suite* de *premier terme* $U_0 = N$, et de *récurrence*: $U_{n+1} = 1/2(U_n + 2/U_n)$. Résultats : Pour $N = 2$, $N=3$, $N=4$ (avec 100000 itérations) on obtient *une valeur approchée de la racine carrée* (1,4142136; pour $N=2$). De même pour les autres nombres, et $N=4$ donne 2, évidemment.
- **Arpentage.** Les arpenteurs babyloniens savent utiliser l'homothétie pour réduire sur leur plan les mesures faites sur le terrain en changeant d'unités et en conservant les proportions, et les angles orientés, le parallélisme. Et inversement, ils savent passer de la conception sur le plan à la réalisation à l'échelle.

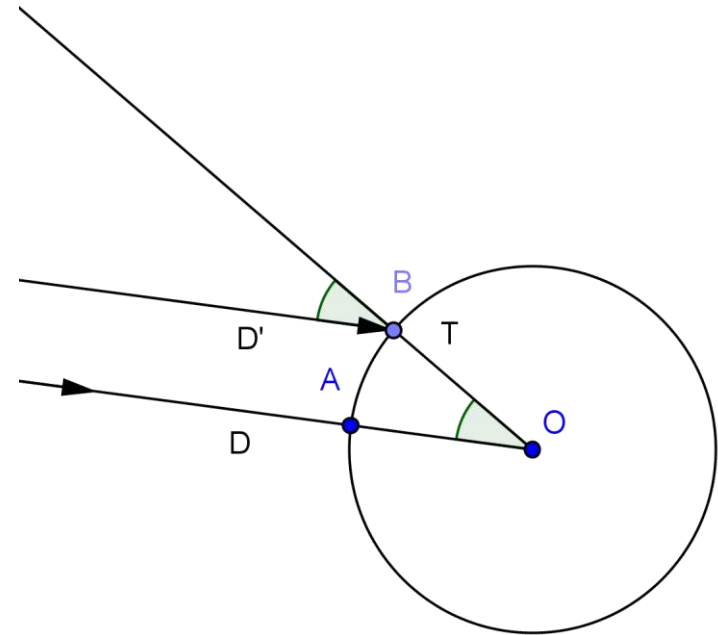
Ci-contre dans une rue de Paris, des élèves d'un lycée parisien font de l'arpentage. Les arpenteurs sont les premiers à avoir découvert et utilisé les règles de la géométrie en Inde, en Irak, et en Egypte dans la haute antiquité.



Index des notions.

- **Angles correspondants:**
Une utilisation pour calculer le rayon de la Terre par Eratosthène.

- Définition : Ce sont les angles qui sont du même côté d'une sécante de deux droites, et si l'un est interne, l'autre est externe, et réciproquement : si les deux droites sont parallèles, ils sont égaux.
- Le Soleil à Assouan (lettre A) est au zénith (une fois par an, quelques instant, pendant le solstice d'été pour un point du tropique du Cancer), donc (D), symbolisant les rayons du Soleil passe par le centre de la Terre O. Au même instant à Alexandrie (lettre B), un rayon (D'), parallèle à (D), fait un angle α avec la verticale. Comme (D)//(D'), l'angle AOB = α (ce sont des angles correspondants). Eratosthène mesure $\alpha = 7,15^\circ$, puis il mesure la distance AB = 800km.
- Comme la longueur d'un arc est proportionnelle à l'angle au centre on peut écrire $360/P = 7,15/800$. Par un produit en croix on obtient $P = 360 \cdot 800 / 7,15 = 40\,300$ km.
- Avec la formule $P = 2\pi R$ calculant la circonférence d'un cercle, on obtient $R = P / (2\pi) = 40300 / (2 \times 3,14...) = 6400$ km pour le rayon de la Terre.



Index des notions

- **Astronomie** : Des temples inscrits au patrimoine de l'Unesco, en 1972 avant la construction du barrage de Nasser, ont dû être déplacés , comme le temple pharaonique d'Abou Simbel dont la réalisation architecturale témoigne aussi d'une connaissance précise étendue et de l'astronomie utilisée au service du pouvoir (de Ramsès).
- **Crues du Nil** : Depuis 1972 (construction du barrage de Nasser) les crues du Nil paraissent maîtrisées (la naissance de la géométrie en Egypte semble lié aux questions de répartition des terres au bord du Nil après chaque inondation). Les terres sont collectivisées et irriguées par des pompes tous les km (données par les japonais notamment).



Photos: selfie à Abou Simbel (2014) et *Le plus vieux calendrier égyptien (temple de Seth à Kom Ombo) (bas)*

Gustave Darboux, enseignant mathématiques,
Conférencier Université Paris Loisirs

Index des notions

- **Le crible d'Eratosthène** :
algorithme permettant de trouver les premiers nombres premiers. Ce sont les nombres divisibles par 1 et par eux-mêmes uniquement. *Comment chercher les nombres premiers inférieurs à 100? On écrit tous les nombres entiers de 1 à 100.*
 - On raye 1 qui n'est pas premier.
 - On entoure 2 qui est premier. On raye tous les nombres multiples de 2 (donc 4,6,8...).
 - On entoure 3 qui est premier.
 - On raye tous les nombres multiples de 3 (donc 6,9,12...).
 - On continue 5 n'est pas rayé, ni 7...etc.
 - La liste des nombres premiers inférieurs à 100 est donc 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Index des notions

- **Datation au carbone 14** : Pour dater un objet les archéologues font souvent le test du *carbone 14*. Ils résolvent un problème de *suite géométrique*. Les *êtres vivants* (hommes, animaux, végétaux) retiennent dans leurs tissus un « cousin » du *carbone 12* (un « isotope ») : le carbone *14*. La proportion entre ces deux carbones reste *constante* dans l'organisme vivant. Après la mort, alors que le carbone 12 reste fixé, le *carbone 14 se désintègre* car il est radioactif. On doit cette découverte au chimiste américain. Willard Libby (Prix Nobel en 1960). Le carbone 14 se désintègre à raison de *1,24 % tous les 100 ans.*

carbone 14 = x %



Index des notions

- **Datation difficile:** selon le contexte les sites archéologiques peuvent être vandalisés pour des raisons idéologiques (ex: les souvent les Coptes dans l'antiquité en Egypte martyrisés par les romains en basse Egypte, et se réfugiant dans des temples ensevelis en haute Egypte ont eu des gestes iconoclastes sur les gravures murales anciennes, représentations contraire à leurs croyances; les squatters dans la forêt de Fontainebleau au sud de Paris; les djihadistes à Palmyre en 2015) : effacer les traces pour retirer de la mémoire des générations suivantes.



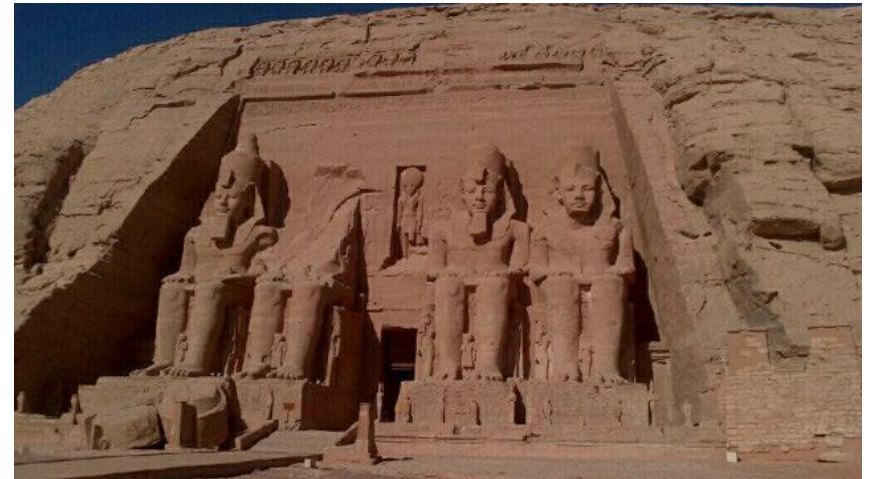
A Fontainebleau des feux de bivouac menacent aussi les gravures du mésolithique. Pour les protéger, leurs emplacement ne sont pas indiqués aux touristes. le chemin de la vallée close et le chemin du pied du Mont. Tandis qu'un exemple de gravure Mésolithique sur la roche un peu endommagé par les feux de campeurs se trouve à proximité, au rocher des Potets. (Accès à la forêt par le parking de la croix St-Jérôme au Nord-Est de Noisy-sur-Ecole.)



Index des notions

- **Edifices architecturaux** : les 3 grandes civilisations ont comme point commun la ressemblance entre les édifices monumentaux : en Iran les ziggourats à Uruk, Assur, et Ninive, Suse représentantes de la civilisation Sumer antique ; en Egypte la 1^{er} pyramide à degrés d'Imhotep à Saqqarah (proche du Caire) sous la III^e dynastie complexe funéraire pour Djeser ; en Inde un édifice de plusieurs dizaines de milliers de briques à Mohenjo-daro (sud du Pakistan actuel) complexe urbain pour 100 000 habitants au milieu de l'Indus.

Ci contre : Tombeau de Ramses à Abou Simbel où l'on remarque que l'astrologie et l'astronomie sont inséparables, car mis au service du pouvoir. Ce qui n'a pas empêché une connaissance en astronomie dotée d'une précision d'horlogerie.



Index des notions

- **Equations du 2d degré** posées comme problème géométrique et leur « solution narrative » (algorithmique): (solution ci-contre de l'exemple énoncé ci-dessus avec les figures correspondantes)
- **Equation du 1^{er} degré** posée par un problème concret dans un papyrus daté de 1650 av. JC. « *On doit diviser 100 miches de pain entre dix hommes comprenant un navigateur, un contremaître et un gardien, tous trois recevant double part. Que faut-il donner à chacun?* ». (Réponse : on pose $7x + 14x = 100$, tout simplement ! Mais j'aurais pu poser l'équation autrement $100 = 3.2x + 7x$, ce qui ne veut pas dire pareil)
 - On prend : x^2 = l'aire du carré central,
 - $12x$ = l'aire des 4 rectangles de côtés x et 3,
 - 45 = la somme de l'aire du carré central et de l'aire des 4 rectangles.
 - **D'où:** $x^2 + 12x - 45 = 0$ équivaut à $x^2 + 12x - 45 + 6^2 + 45 = 6^2 + 45$, (méthode dite de « **complétion du carré** » lorsqu'on ajoute $(b/2)^2 - c$ des deux côtés de $ax^2 + bx + c = 0$, où encore « **forme canonique** »). J'obtiens $x^2 + 12x + 36 = 81$. Or $4 \times 9 = 36$ c'est l'aire des 4 petits carrés, d'où 81 représente l'aire du grand.
 - Le côté du grand carré vaut donc $3x$ et l'aire du grand carré $9x^2$.
 - **On demande la ou les solutions de $(x+6)^2 = 81$.** Or, $x^2 + 12x + 36 = (x+6)^2 = 9x^2 = 81$. Ce qui équivaut à $x^2 = 9$ soit $x = 3$ (ou -3 mais ici une solution négative est exclue).

Index de notions

- **Equation de Diophante.**
Exemple avec un problème russe : « Vous devez acheter 19 roubles un pull, mais vous n'avez que des billets de 3 roubles, et la caissière n'a que des billets de 5 roubles. Pouvez vous payer votre achat avec l'argent dont vous disposez? ». *(Diophante ne cherchait qu'une solution. Réponse : Le problème se ramène à résoudre $3x-5y=19$. On peut tracer la droite qui a cette équation cartésienne, et observer pour tout x entier positif quand est-ce qu'on obtient une première valeur y entier positif.)*

L'équation est de la forme $ax+by=c$, (E)
On applique le théorème de Bézout

Soit a et b sont premiers entre eux, alors il existe u et v 2 entiers relatifs tels que $au+bv=1$

3 et -5 sont irréductibles entre eux,
 $3u-5v=1$, ex: avec $u=2$, et $v=1$

Le couple $(uc; vc)$ est solution de (E), notons la $(x';y')$

$(38; 19)$ est une solution de (E)

Le système
 $ax+by=0$, (L1)
 $ax'+by'=c$, (L2)
Où (L1) équivaut à $a(x-x')+b(y-y')=0$
Le couple $(X=x-x', Y=y-y')$ est solution de (E'):
 $aX+bY=0$, où $(X;Y)=(-bz;az)$, z appartient aux relatifs.

$(X=x-38; Y=y-19)$ est le couple solution de $3X-5Y=0$, où $(X,Y)=(5z;3z)$, z un nombre relatif quelconque. D'où $(x;y)=(38+5z; 19+3z)$.
Vérification:
Si $z=1$
 $x=43$, (129 sortie)
 $y=22$, (-110 entrée)

Index des notions

- **Mise en équation d'un problème, et traduction du langage naturel en langage algébrique.** De nos jours nous ne sommes plus surpris de trouver la *lettre x* comme *inconnue* dans une équation comme $x^2 + 2x - 80 = 0$. Cette équation pourrait être traduite en problème d'arpenteur: « *Quelle est la longueur des côtés d'un champ carré sachant que si on l'agrandit en prolongeant un de ses côtés de 2, la surface de l'ensemble sera égale à 80?* » Ce symbolisme a commencé à fonctionner vraiment seulement à partir du 17^{ème} siècle.
- **Papyrus de Rhind** datant de -2000 av. JC (-1650?) écrit par le scribe Ahmes (qui fait lui-même référence à un ouvrage mathématique de **-3000 av. JC.**) découvert par Rhind au 19^{ème} siècle dans la région de *Thebes* (actuelle *Luxor*).
- Le **papyrus de Moscou** datant de -1850. Le papyrus mathématique de Moscou est le plus ancien, tandis que le papyrus de Rhind est le plus grand. Découvert par Wladimir Golenischeff au Caire. Exemples de problèmes qu'il donne : *L'aire d'un rectangle est 12. La largeur vaut les trois quarts de la longueur. Quelles en sont les dimensions?* (Réponse : $A=12=I.L$, et $I=3L/4$ d'où $3L^2/4=12$, d'où $L=4$ (ou -4 , impossible pour une longueur)). $I=3$ *Un côté d'un triangle rectangle vaut deux fois et demie l'autre côté et l'aire vaut 20. Quelle en sont les dimensions?* (Idem, $x=8^{1/2}$ et $y=5x/2$)



Index des notions

- **Problème de progression** (papyrus de Rhind) : Traduction que l'on peut exprimer ainsi: « *Partager 100 boisseaux de blé entre 5 personnes de la façon suivante : la deuxième recevra en plus de la première autant que la troisième recevra en plus de la deuxième, que la quatrième recevra en plus de la troisième, et que la cinquième recevra en plus de la quatrième. En outre, les deux premières personnes doivent avoir ensemble 7 fois moins de blé que les trois autres. Combien faut-il donner de blé à chaque personne?* »

(Ci-contre la solution avec le symbolisme actuel)

- °1) Poser les équations.

- a) J'appelle U_0, U_1, U_2, U_3, U_4 la part de blé distribuée à chaque personne,
- C'est une de premier terme U_0 et *suite arithmétique* de *raison* p , qui comporte 5 *termes* U_0, U_1, U_2, U_3, U_4 et de *formule de récurrence* $U_{n+1} = U_n + p$
- $100 = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4$
- équivaut à $20 = U_0 + 2p$
- b) Je traduis le début de l'énoncé : $U_0 + U_1 = (U_2 + U_3 + U_4) / 7$
- équivaut à : $11U_0 - 2p = 0$
- J'obtiens *un système de deux équations* du premier degré à deux inconnues.

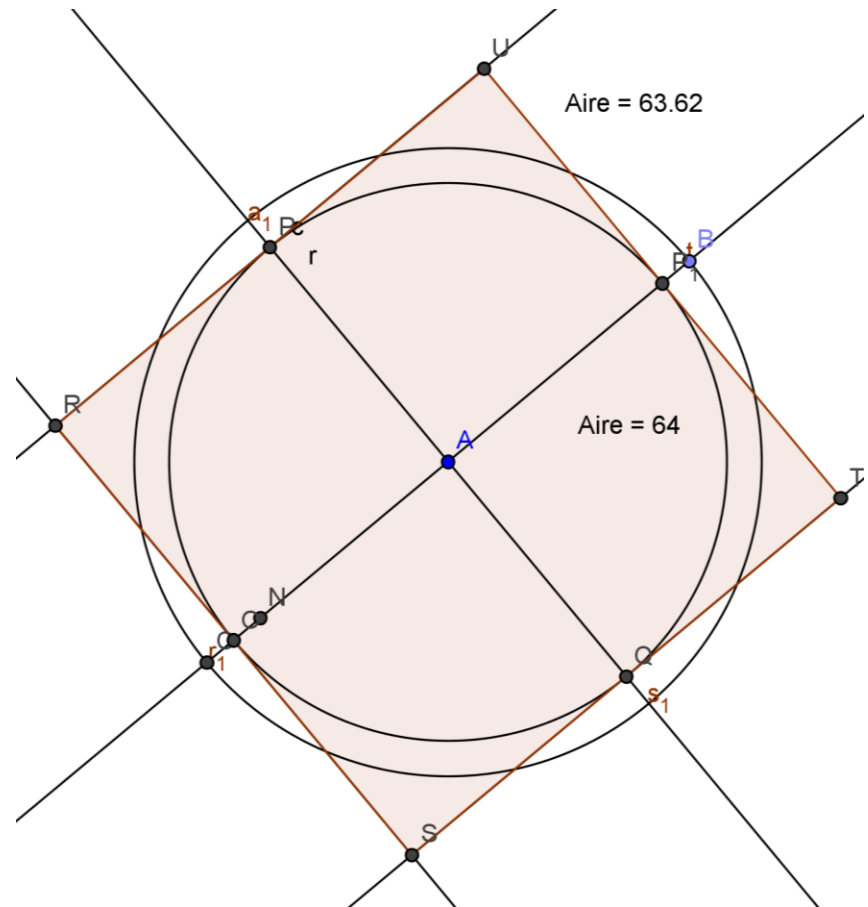
- ° 2) Résoudre le système:

- Ce qui me permet de déduire $U_0 = 5/3$
- Puis, la part des autres ($10 + 5/6$; 20 ; $29 + 1/6$; $38 + 1/3$)

Index des notions

- **Quadrature du cercle** : Problème de construction dans le papyrus de Rhind (énoncé ci-dessus avec la figure correspondante, on arrive à la figure ci-contre). En voici l'algorithme permettant une solution approximative donnée par le scribe : L'aire du carré = 64, l'aire du disque=63,62

1. On crée un cercle de centre A, passant par un point B, et on trace (AB) en faisant apparaître le point C tel que BC soit le diamètre.
2. On trace une droite (BD) telle que D ne soit pas sur (BC), et sur (BD) on place un point E quelconque et on trace le cercle de centre E et de rayon EB,
3. On place le point F tel que BF soit le diamètre du cercle de centre E, puis on recommence à partir de F à tracer un cercle de rayon FE...etc.
4. On place ainsi les points E, F, G, H, I, J, K, L, M sur (BD)
5. On trace ensuite (CM) et la parallèle à (CM) passant par L. Et, on place N le point d'intersection de cette parallèle avec (BC).
6. On mesure d(C,N)
7. On cache tous les autres points sauf A et B, la droite (AB), et le cercle de centre A et passant par B.
8. On trace le cercle de centre A et de rayon CN*4, puis on place O le point d'intersection de ce cercle avec (AB)
9. On trace les perpendiculaires à (AB) passant par O et A. P et Q sont les intersections entre la perpendiculaire passant par A et le cercle de rayon AO.
10. On trace les parallèles à (AB) passant par Q et P. Elles ont comme points d'intersection avec la perpendiculaire passant par O les points R et S. On termine le carré RSTU
11. Comparer l'aire du cercle de centre A et de rayon AB et l'aire du carré RSTU.



Index des notions.

Théorème de Thalès

- **Enoncé :** Etant données deux droites (D) et (D') sécantes en A, M et N deux points de (D) distincts de A, M' et N' deux points de (D') distincts de A, si (MM') et (NN') sont parallèles, alors $AM/AN = AM'/AN' = MM'/NN'$
- **Corollaire :** Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté, et est parallèle à un 2° côté, alors elle coupe en son milieu le 3°
- **Réciproque :** Etant données (D) et (D') droites sécantes en A, et M, N deux points de (D) distincts de A, et M', N' deux points de (D') distincts de A. Si $AM/AN = AM'/AN'$, alors A, M, N et A, M', N' sont alignés dans le même ordre et (MM') // (NN')
- **Corollaire:** Dans un triangle, si une droite passe par les milieux de deux côtés, alors elle est parallèle au 3° côté

Théorème de Pythagore

- **Enoncé:** Si ABC est un triangle rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$
- **Réciproque:** Si les côtés d'un triangle ABC vérifient $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors le triangle est rectangle en A.

Index des idées (bilan).

- Les savoirs faire fondamentaux acquis des premières civilisations en mathématiques n'en font pas encore une science, par défaut de dictionnaires et de définition. Les premiers énoncés scientifiques sont en grec.
- Les sages grecs (Thalès, Pythagore) ne sont peut-être pas « sages » comme on l'imagine.
- L'académie de Platon critique les sophistes non sans mal, et Aristote trouve une logique inconsistante dont il se désintéresse lui-même.
- Les lumières d'Alexandrie sont éclipsées après la conquête romaine car Archimède a utilisé son savoir contre les romains.
- Les derniers mathématiciens dont on ne sait presque rien, ont pourtant eu une très grande influence.

Bibliographie

- Bachelard : « *Husserl reconnaissait que ce qui rend possible la science c'est, heureusement, non pas la réflexion qui pénètre l'essence des choses mais l'instinct scientifique.* » (Bachelard, la préface au livre de J. Cavaillès *Sur la logique*)
- J.-L. Brahém, *Histoires de géomètres et de géométrie*, éditions Le Pommier 2011.
- Husserl : le phénoménologue des sciences E. Husserl considère que l'origine de la Géométrie revient à Platon et non à un « *Thalès imaginaire* » (*L'origine de la géométrie*).
- Kramer (Samuel Noah) archéologue qui a fait connaître la civilisation sumérienne par son livre célèbre *L'histoire commence à Sumer* (1957)
- Michel Jansen, historien de l'urbanisme contemporain, dans une vidéo sur youtube, il pense qu'une révolution du mode de transport explique l'apparition des 3 grandes civilisations de l'antiquité : passage d'une civilisation rurale développée utilisant les transports terrestres (bœufs) à une civilisations urbaines qui sont à la fois des centres administratifs utilisant le bateau et maîtrisant l'eau des fleuves.

